HINWEIS
Die Gleichungsnumerierung sollte z.B. über Modifikation der Counter und nicht über Tags mit den jeweiligen Zahlen zu erfolgen.

1 Die Euler-Formel

Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ist

$$\exp(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{0}$$

die von Sinus und Cosinus sind

$$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{1-IIa}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{1-IIb}$$

Damit lässt sich die Eulerformel

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x) \tag{Die Eulerformel}$$

wie folgt verifizieren:

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2l}}{(2l)!} \qquad (3) \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2l+1}}{(2l+1)!} \qquad (4) \\
&= \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!}}_{\cos(x)} + \mathrm{i} \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}}_{\sin(x)} \\
&= \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x). \qquad (5)
\end{aligned}$$

Dabei wurden Zeile 3 bzw. Zeile 4 die folgenden Identitäten verwendet:

$$\mathrm{i}^{2l} = (\mathrm{i}^2)^l = (-1)^l \tag{6}$$

$$\mathrm{i}^{2l+1} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^{2l} = \mathrm{i}(-1)^l \tag{7}$$